Sahline | A.S :2006/2007

Devoir de Contrôle N°2

Classes $4^{ème}$sc & T

Durée : 2.h

Exercice N°1: (6pts)

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les points $A(2,-1,1);B(0,-1,-1)$ et $C(-2,0,-1)$

1/a) Montrer que les points A,B et C définissent un plan P

b) Vérifier que le plan P à pour équation : $x+2y-z+1=0$

2/a) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et perpendiculaire à P

b) Calculer la distance δ du point B à la droite D

3/ Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par C et de vecteur normale $\vec{n}=-\vec{i}+\vec{k}$

4/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite $D'=P\cap Q$

5/ Montrer que D et D' ne sont pas coplanaires

Exercice N°2 :(4 pts)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z)=z^4-\sqrt{2}z^3-4\sqrt{2}z-16$

1/ Déterminer les deux réels a et b tel que : $\forall\ z\in\mathbb{C}$ on a $f(z)=(z^2+4)(z^2+az+b)$

2/ En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation f(z) = 0

3/ Placer dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les images A,B,C et D des Solutions de l'équation f(z) = 0

4/ Montrer que les points A, B ,C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

Problème : (10 pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2+1-\text{Log}x$

1 / Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

2/ En déduire pour tout x de $]0,+\infty[$; g(x) > 0

II- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+1+\dfrac{\text{Log}x}{x}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$;$\forall\ x\in\,]0,+\infty[$

b) Dresser tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite D : y = x + 1 est une asymptote à ζ_f

b) Etudier les positions de ζ_f par rapport à D

3/a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que l'équation f(x)= 0 admet une solution unique α et que $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$

4/ Tracer D , ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère (où f^{-1} est la fonction réciproque de f)

5/ Soit F une primitive de f sur $]0,+\infty[$

Montrer que $F(e)-F(1)=\dfrac{e^2+2e-2}{2}$